

BADANIE REZONANSU PRĄDU PRZEMIENNEGO W SZEREGOWYM UKŁADZIE RLC

Zagadnienia:

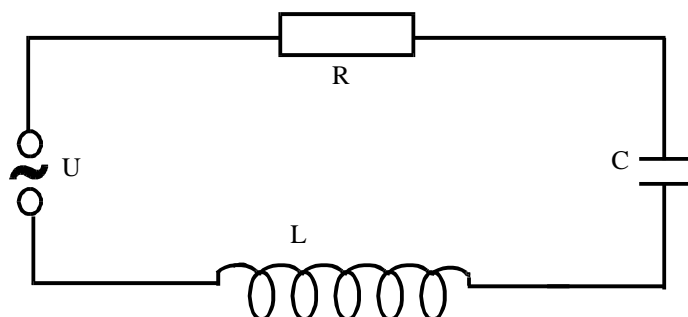
1. Podstawowe wielkości charakteryzujące obwody elektryczne z prądem przemiennym.
2. Drgania elektryczne : swobodne, tłumione i wymuszone w szeregowym obwodzie RLC.

Literatura:

1. Podręczniki do ćwiczeń laboratoryjnych.
2. J. I. Butikow, A. A. Bykow, A. S. Kondratiew, Fizyka cz.I
3. D. Halliday, R. Resnick, Fizyka t.II
4. S. Szczeniowski, Fizyka doświadczalna cz.III
5. I. W. Sawieliew, Kurs fizyki cz.I i II

Wprowadzenie:

Rozważmy obwód :



Dla obwodu szeregowego RLC na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa otrzymujemy :

$$U(t) = U_R + U_C + U_L \quad (1)$$

wiadomo, że

$$U_R = R \frac{dq}{dt}, \quad U_C = \frac{q}{C}, \quad U_L = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

Jeżeli zewnętrzne napięcie $U(t)$ zmienia się według zależności :

$$U(t) = U_0 \cos \omega t ,$$

to podstawiając powyższe zależności do równania (1) otrzymujemy :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t \quad (2)$$

Po podzieleniu przez L i wprowadzeniu oznaczeń (3)

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} , \quad 2\beta = \frac{R}{L} , \quad f_0 = \frac{U_0}{L} \quad (3)$$

równanie (2) ma następująca postać :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t \quad (4)$$

Ogólne rozwiązanie równania (4) dla stanu ustalonego można zapisać :

$$q = b \cos(\omega t - \varphi) \quad (5)$$

Amplitudę b i przesunięcie fazowe φ należy tak dobrać, aby funkcja (5) była rozwiązaniem równania (4).

Szczególne rozwiązanie równania (4) zgodnego z (5) można zapisać jako :

$$q = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cdot \cos(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}) \quad (6)$$

gdzie :

$$b = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

Amplituda ustalonych drgań wymuszonych jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej f_0 i zależy od częstości siły wymuszającej ω i tłumienia β . Z analizy zależności $b = f(\omega, \beta)$ wynika, że maksimum amplitudy ładunku przypada dla różnych częstości, jeżeli obwód ma różne wartości β przy $\omega_0 = \text{const}$. Inaczej można powiedzieć, że ze zmianą β zmienia się częstość rezonansowa ω_{rez} . Amplituda ładunku b osiąga maksimum, jeżeli mianownik w wyrażeniu (7) osiąga minimum. Proste obliczenia prowadzą do zależności :

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (8)$$

Amplituda ładunku w rezonansie (b_{rez}) jest równa :

$$b_{rez} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \quad (9)$$

W przypadku natężenia prądu odpowiednie zależności mają inną postać. Wiadomo, że $i = \frac{dq}{dt}$ zatem równanie (6) dla natężenia prądu przybierze postać :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{f_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}) \quad (10)$$

Łatwo zauważyć, że amplituda prądu $b' = \omega b$

$$b' = \omega b = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2}} \quad (11)$$

osiąga maksimum zawsze dla $\omega = \omega_0$ niezależnie od wartości tłumienia β .

Jakość obwodu elektrycznego charakteryzuje dobroć Q zdefiniowana jako stosunek energii zmagazynowanej w obwodzie do średniej energii traconej w jednym okresie. Dla rozważanego obwodu :

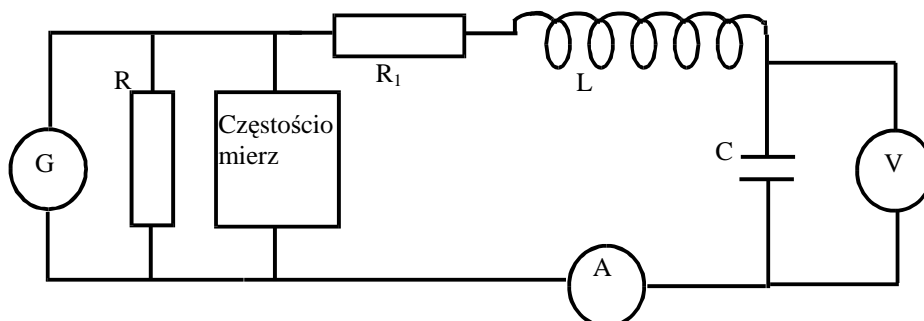
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12)$$

Korzystając z zależności (12) równanie (8) można zapisać w postaci :

$$\omega_{rez} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (13)$$

Wykonanie ćwiczenia:

Zestawić obwód według schematu :



$R = 100\Omega$, $R_1 = 0; 1; 2; 2,5 \text{ k}\Omega$, G - generator

Opór omowy indukcyjności $R_L = 35\Omega$, $R_u = R + R_1 + R_L$

$C = 10 \text{ nF}$, $L = 0,1 \text{ H}$

1. Włączyć generator, częstościomierz i mierniki. Ustalić napięcie wyjściowe generatora $U_{sk} = 6 \text{ V}$. Włączenie generatora i częstościomierza dokonuje się przez wciśnięcie klawisza „mains”.

Generator - napięcie zbierać z zacisków „out 2”. Przełącznik zakresów ustawić w pozycji 6,5 V. Klawisz „out 2” wciśnięty.

Częstościomierz - wcisnąć klawisze : „mode-preset time” 1x, 10°. Pomiar częstości dokonuje się po naciśnięciu klawisza start. Wyświetlana wartość odpowiada mierzonej częstości wyrażonej w Hz.

2. Sporządzić rodziny charakterystyk $q = f(\omega)$ i $i = f(\omega)$ dla ustalonych wartości R, L, C . Pomiary wykonać dla $R_1 = 0; 1; 2$ i $2,5 \text{ k}\Omega$ w przedziale częstości od 200 Hz do 10 kHz (w przedziale od 200 Hz do 2 kHz pomiary wykonać co 500 Hz, w przedziale 4-6 kHz pomiary dokonać średnio co 100 Hz, a poza tym obszarem średnio co 200 Hz).

Uwaga: Ładunek q mierzymy pośrednio, mierząc spadek napięcia na zaciskach kondensatora. Studenci wykonujący ćwiczenie w ciągu 2 godzin mogą się ograniczyć do pomiarów dla 3 wartości R_1 (0, 2, 2,5 k Ω)

3. W jednym układzie współrzędnych wykreślić rodzinę krzywych $q = f(\omega)$ oraz rodzinę krzywych $i = f(\omega)$. Na podstawie uzyskanych krzywych wyznaczyć $\omega_0, \omega_{rez}, q_{max}, i_{max}$ i Q . Dobroć układu na podstawie krzywych $i = f(\omega)$ wyznaczamy z zależności:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \omega_{rez} = \omega_0 \quad \text{dla } i = f(\omega) \quad (14)$$

gdzie $\Delta\omega$ oznacza przedział częstości odpowiadający szerokości pasma zmierzonego na wysokości $0,7 i_{max}$.

Częstość rezonansową, na podstawie wykresu $q = f(\omega)$ wyznaczamy z zależności:

$$\omega_{rez} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} \quad (15)$$

gdzie ω_1, ω_2 są częstościami, dla których b (zależność (7)) ma taką samą wartość $b(\omega_1) = b(\omega_2)$. Zalecany pomiar ω_1, ω_2 na wysokości $0,7 q_{max}$.

4. Korzystając z zależności (3), (12) i (13) wyznaczyć teoretyczne wartości ω_0, ω_{rez} oraz Q i porównać je z wartościami wyznaczonymi doświadczalnie.
5. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników i rachunek błędów.
6. Tablica pomiarów.

Lp.	f [Hz]	i [mA]	U_c [V]	$R_u = R + R_1 + R_L$ [Ω]

Uwaga: Generator zasilający układ jest zwarty oporem $R = 100 \Omega$, opór omowy cewki indukcyjnej $R_L = 35 \Omega$, zatem opór czynny układu $R_{ukł} = R_L + R + R_1$. Przyjmując, że podane wartości R, C są obarczone błędem $\pm 2,5\%$.