

**Problem 1.** Rozstrzygnąć, czy wielomian różnowartościowy na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  musi być różnowartościowy na  $\mathbb{R}$ .

*Autor: Krzysztof Kamiński*

**Rozwiązanie:**

Liczbę rzeczywistą  $t$  nazwiemy złą, jeśli

1.  $t$  jest wymierna, lub
2.  $t$  jest niewymierna i  $f(t) = f(q)$  dla pewnej liczby wymiernej  $q$ .

Jest przeliczalnie wiele liczb wymiernych  $q$ , a każda z wartości  $f(q)$  jest osiągnięta dla co najwyżej skończonego wielu argumentów. A więc liczb złych jest przeliczalnie wiele (\*).

Zauważmy też, że na mocy założenia o różnowartościowości na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , jeśli dla dwóch różnych liczb rzeczywistych  $x, y$  mamy  $f(x) = f(y)$ , to co najmniej jedna z liczb  $x, y$  jest wymierna (bo albo obie są wymierne (1), albo jedna jest wymierna a druga niewymierna, ale  $f(x) = f(y)$  (2)), tak więc obie liczby  $x, y$  są złe.

Założmy nie wprost, że  $f(x)$  nie jest różnowartościowa na  $\mathbb{R}$ . To oznacza, że monotoniczność funkcji  $f(x)$  musi ulegać zmianie, więc w pewnym punkcie  $x_0$  funkcja  $f$  ma ekstremum lokalne. Możemy wybrać takie liczby rzeczywiste  $s, t$ , że  $f([x_0 - s, x_0]) = f([x_0, x_0 + t])$ . To oznacza jednak, że każda liczba z przedziału  $[x_0 - s, x_0]$  jest zła, więc otrzymaliśmy nieprzeliczalnie wiele liczb złych (bo to przedział), co stanowi sprzeczność z (\*).

A więc wielomian różnowartościowy na  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  musi być różnowartościowy na  $\mathbb{R}$ .

*Jakub Złoty, student III roku matematyki 21.06.2024r.*