

Instrukcja oceny niepewności pomiarów w I Pracowni Fizycznej.

Normy międzynarodowe.

I. Wprowadzenie

W roku 1995, po wielu latach pracy, uzgodniono międzynarodowe normy dotyczące terminologii i sposobu określania niepewności w pomiarach. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) opublikowała „Przewodnik” [1], który został przełożony na język polski [2]. Stosowanie norm ISO w zakresie obliczania i podawania niepewności pomiarów jest obowiązkiem, podobnym do obowiązku stosowania układu [SI].

II. Podstawowe pojęcia

1. Niepewność a błąd pomiaru

W przypadku pojedynczych pomiarów stosuje się określenia:

Błąd bezwzględny: $\Delta = x - x_0$

Błąd względny: $\delta = \frac{\Delta}{x_0}$,

gdzie x – wartość zmierzona, x_0 – wartość rzeczywista.

Wielkości określone wzorami (1) i (2) są pojedynczą realizacją zmiennej losowej. W praktyce wartości rzeczywistych wielkości mierzonych są nieznane i szacuje się **niepewności pomiarowe** wynikające ze statystycznych praw rozrzutu pomiarów.

Niepewność pomiaru – parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.

Wszystkie pomiary obarczone są **niepewnościami pomiarowymi**, które można zmniejszać stosując lepsze przyrządy pomiarowe, lecz nie można ich całkowicie wyeliminować.

2. Niepewność standardowa wyniku pomiaru bezpośredniego wielkości X , (oszacowanie odchylenia standardowego).

Oznaczenie: u (uncertainty).

Sposoby zapisu: u , $u(x)$, $u(\text{stężenie NaCl})$.

Symbol x w konkretnej sytuacji należy zastąpić symbolem mierzonej wielkości fizycznej.

Niepewność standardowa względna:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x} \cdot 100\% \quad (1)$$

3. Ocena niepewności metodą typu A – oparta na metodzie określania niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii wyników pomiarów, wymaga odpowiednio dużej liczby powtórzeń pomiaru i ma zastosowanie do błędów przypadkowych.

4. Ocena niepewności metodą typu B – obliczana na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego przez eksperymentatora (prawdopodobieństwa subiektywnego), który wykorzystuje wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności. Ocena typu B może być zastosowana w każdej sytuacji, zwłaszcza gdy

statystyczna analiza nie jest możliwa. Stosuje się ją do oceny błędu systematycznego lub dla jednego wyniku pomiaru.

- 5. Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$** jest niepewnością wyników pomiarów pośrednich $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$, gdzie symbole $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ oznaczają k wielkości mierzonych bezpośrednio. Jest ona obliczana (wyznaczana) z prawa przenoszenia niepewności pomiaru.
- 6. Niepewność rozszerzona U lub $U(y)$** jest miarą pewnego „przedziału ufności” otaczającego wynik pomiaru pośredniego. Oczekuje się, że w przedziale tym jest zawarta duża część wartości, które w rozsądny sposób można przypisać wielkości mierzonej. Wartość U oblicza się mnożąc złożoną niepewność standardową przez bezwymiarowy współczynnik rozszerzenia k .
- 7. Współczynnik rozszerzenia k** jest mnożnikiem złożonej niepewności standardowej, stosowanym w celu uzyskania niepewności rozszerzonej.

III. Niepewności pomiarów bezpośrednich

1. Metoda typu A obliczania niepewności standardowej

Ocena typu A opiera się na analizie statystycznej serii wyników pomiarów. Wykonywanie n pomiarów bezpośrednich jest odpowiednikiem losowania n - elementowej próbki $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ z nieskończonej licznej populacji, którą stanowią wszystkie możliwe do wykonania pomiary. Jeżeli warunki zapewniają taką samą dokładność niezależnych pomiarów, to zmienna losowa, jaką jest wynik pojedynczego pomiaru podlega rozkładowi normalnemu (Gaussa).

Za **wynik pomiaru** przyjmuje się **średnią arytmetyczną** n wyników pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2)$$

którą uznaje się za dobre oszacowanie (estymator) wartości prawdziwej x_0 .

Wartość eksperymentalnego odchylenia standardowego charakteryzującego rozrzut wyników serii n pomiarów tej samej wielkości mierzonej można wyznaczyć ze wzoru:

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3)$$

Takie odchylenie charakteryzuje każdy pomiar z osobna.

Niepewnością standardową wyniku średniego \bar{x} pomiaru wielkości X nazywamy odchylenie standardowe eksperymentalne średniej arytmetycznej, które oblicza się ze wzoru:

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (4)$$

UWAGA! Chociaż niepewność ta odnosi się do \bar{x} jej symbolem jest $u(x)$ a nie $u(\bar{x})$.

Metoda regresji liniowej

Ocenami niepewności typu A są wszelkie inne metody określania niepewności przy użyciu metod statystycznych, w tym np. metoda regresji liniowej.

Zagadnienie polega na poprowadzeniu prostej

$$y = ax + b, \quad (5)$$

jak najlepiej dopasowanej do zbioru n punktów doświadczalnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$, pomiędzy którymi istnieje zależność liniowa, w celu uzyskania wartości parametrów a i b opisujących prostą, oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$. Najczęściej wykorzystywana do tego celu jest **metoda najmniejszych kwadratów**. W przypadku, gdy niepewności przypisane punktom eksperymentalnym są jednakowe, prowadzi ona do następujących wzorów na a i b :

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{D}, \quad (6)$$

$$b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{D}, \quad (7)$$

gdzie $D = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$.

oraz na ich niepewności standardowe $u(a)$ i $u(b)$:

$$u(a) = s_y \sqrt{\frac{n}{D}}, \quad u(b) = s_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{D}}, \quad (8)$$

gdzie $s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2}{n - 2}}$. (9)

2. Metoda typu B obliczania niepewności standardowej

Niepewność standardową szacuje się metodą typu B w przypadku, gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru, albo gdy wyniki nie wykazują rozrzutu. Wówczas niepewność standardową ocenia się na podstawie wiedzy o danej wielkości lub o przedziale, w którym wartość rzeczywista powinna się mieścić. Należy podkreślić, że ocena niepewności metodą typu B, podobnie jak metodą typu A, jest oparta na rozkładzie prawdopodobieństwa, z tą różnicą, że niepewność standardową typu B oblicza się na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego przez obserwatora.

1) Niepewność wzorcowania

W przypadku wyników nie wykazujących rozrzutu główną przyczyną niepewności pomiarów jest **niepewność wzorcowania Δ_x** .

Przyjmuje się, że najlepszym przybliżeniem niepewności wzorcowania Δ_x jest wartość najmniejszej działki skali, zwana działką elementarną użytego przyrządu.

Jej wartość wynosi dla linijki 1 mm, suwmiarki 0,05 mm, śruby mikrometrycznej 0,01 mm, termometru lekarskiego 0,1°C itd. itp.

Wyłącznie od eksperymentatora zależy, czy wartość niepewności wzorcowania zwiększy, czy też zmniejszy poza wartość tej działki.

Niepewność wzorcowania przyrządów analogowych

W przyrządzie analogowym jego „dokładność” precyzuje tzw. klasa przyrządu, która wyraża w procentach stosunek niepewności maksymalnej Δx do pełnego wychylenia miernika na danym zakresie pomiarowym:

$$\Delta_d x = \frac{\textit{klasa} \cdot \textit{zakres}}{100} \quad (10)$$

Niepewność wzorcowania przyrządów cyfrowych

W celu określenia niepewności wzorcowania miernika cyfrowego należy w instrukcji przyrządu znaleźć wartość niepewności wzorcowania, najczęściej podaną jako kombinacja liniowa wartości mierzonej i zakresu:

$$\Delta_d x = C_1 \cdot \textit{wartość mierzona} + C_2 \cdot \textit{zakres pomiarowy}, \quad (11)$$

gdzie C_1 i C_2 to współczynniki charakterystyczne dla danego miernika.

Niepewność standardowa

Znając wartość niepewności wzorcowania $\Delta_d x$ danego przyrządu pomiarowego i przy założeniu, że rozkład gęstości prawdopodobieństwa tej wielkości jest rozkładem jednostajnym (prostokątnym), niepewność standardowa może zostać obliczona ze wzoru:

$$u(x) = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}} \quad (12)$$

2) Niepewność eksperymentatora

Drugą przyczyną niepewności pomiarów nie wykazujących rozrzutu jest **niepewność eksperymentatora** $\Delta_e x$, spowodowana przyczynami znanymi eksperymentatorowi, ale od niego niezależnymi. Eksperymentator korzysta ze swego doświadczenia i wiedzy w celu określenia niepewności $\Delta_e x$ oraz wynikającej stąd niepewności standardowej. Niepewność standardową eksperymentatora można oszacować na podstawie rozkładu jednostajnego, wtedy:

$$u(x) = \frac{\Delta_e x}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

Za dokładność eksperymentatora można np. uznać dokładność odczytu z miernika analogowego (do 1 działki skali, do ½ działki, itd.) uzależnioną od warunków panujących podczas pomiarów (pośpiech, hałas, zużycie miernika (np. wykrzywienie wskazówki), czy w przypadku odczytu z miernika cyfrowego wartość odpowiadającą przeskokowi ostatniej cyfry. Jeżeli istnieje kilka czynników wpływających na uzyskany wynik, to spowodowane przez nie niepewności sumuje się.

3) Niepewność tablicowa

Niepewnościami obarczone są również wyniki zaczerpnięte z literatury, tablic matematycznych lub kalkulatora. Jeśli nie jest podana wartość odchylenia standardowego takich wyników i brak jest jakiegokolwiek informacji o niepewności, przyjmujemy, że **niepewność tablicowa** $\Delta_t x$ jest równa 10 jednostkom ostatniego miejsca dziesiętnego. Niepewność standardowa jest szacowana na podstawie rozkładu jednostajnego:

$$u(x) = \frac{\Delta_t x}{\sqrt{3}}.$$

4) Całkowita niepewność standardowa

Najczęściej przyczynki od niepewności wzorcowania, niepewności eksperymentatora i niepewności tablicowej występują jednocześnie i wtedy niepewność standardowa szacowana metodą B powinna być obliczona ze wzoru:

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_d x)^2 + (\Delta_e x)^2 + (\Delta_t x)^2}{3}}. \quad (14)$$

IV. Pomiar pośredni. Prawo przenoszenia niepewności

W większości pomiarów fizycznych szukanej wielkości nie można zmierzyć bezpośrednio. Jest ona wyznaczana z zależności funkcyjnej:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k), \quad (15)$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ oznaczają wielkości mierzone bezpośrednio, a k oznacza ich ilość. Natomiast $u(x_1), u(x_2), u(x_3), \dots, u(x_k)$ oznaczają niepewności standardowe tych wielkości.

Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ wielkości fizycznej y jest wyznaczana z prawa przenoszenia (propagacji) niepewności, przy czym istotne jest określenie czy wielkości $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ zostały zmierzone w **miarach skorelowanych** czy **nieskorelowanych**.

1. Wielkość złożona - pomiary bezpośrednie nieskorelowane

W pomiarach nieskorelowanych każdą wielkość mierzy się w innym, niezależnym doświadczeniu (przy użyciu innego przyrządu i w innym czasie).

Funkcja jednej zmiennej

Jeżeli wielkość y zależy tylko od jednej bezpośrednio mierzonej wielkości fizycznej o wartości x i przyjmując, że niepewność $u(x)$ jest mała w porównaniu z wartością mierzoną x , niepewność $u(y)$ można obliczyć jako iloczyn pochodnej funkcji i niepewności $u(x)$:

$$u(y) = \frac{dy}{dx} u(x). \quad (16)$$

Funkcja wielu zmiennych

Przybliżoną złożoną niepewność standardową $u_c(y)$ wielkości y , liczonej na podstawie zmierzonych bezpośrednio wielkości x , oblicza się korzystając z **prawa przenoszenia niepewności** pomiarów bezpośrednich nieskorelowanych:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}, \quad (17)$$

Powyższy wzór stanowi wyraz liniowy rozwinięcia szeregu Taylora.

2. Wielkość złożona – pomiary bezpośrednie skorelowane

W pomiarach **skorelowanych** wielkości są mierzone bezpośrednio za pomocą jednego zestawu doświadczalnego w tych samych warunkach, a więc bez wprowadzania jakichkolwiek zmian w układzie pomiarowym i w tym samym czasie. W praktyce oznacza to, że na przykład wszystkie pomiary w złożonych układach elektrycznych są pomiarami skorelowanymi.

Pomiary pośrednie skorelowane – obliczenia ścisłe.

W pierwszym kroku należy określić niepewności standardowe wszystkich k wielkości mierzonych bezpośrednio $u(x)$.

W drugim kroku należy określić korelacje między wynikami pomiarów wielkości zmierzonych bezpośrednio. W tym celu korzysta się ze wzoru, wynikającego z rozwinięcia w szereg Taylora:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)}, \quad (18)$$

gdzie

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)} \quad (19)$$

Jest estymatorem współczynnika korelacji, a $u(x_i, x_j)$ oznacza estymator kowariancji wielkości x_i i x_j .

Pomiary pośrednie skorelowane – obliczenia uproszczone.

Z uwagi na bardzo skomplikowane obliczanie złożonej niepewności standardowej wielkości mierzonej pośrednio o skorelowanych wielkościach wejściowych (mierzonych bezpośrednio) w **pracowniach studenckich** wygodniej jest postępować następująco:

Wyniki y_i oblicza się korzystając z kompletu wyników pomiarów bezpośrednich k wielkości $x_{k,i}$ uzyskanych w i -tym pomiarze $y_i = f(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}, \dots, x_{k,i})$. Seria wyników y_i , uzyskanych w n pomiarach, stanowi próbkę losową podobnie jak w pomiarach bezpośrednich. Przyjmuje się, że wynikiem pomiaru pośredniego jest:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad (20)$$

a złożoną niepewność standardową wyniku określa wzór:

$$u_c(y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (21)$$

V. Niepewność rozszerzona i zapisywanie wyników

Dla celów komercyjnych, przemysłowych, zdrowia i bezpieczeństwa zachodzi konieczność podania miary niepewności, która określa przedział otaczający wynik pomiaru zawierający dużą, z góry określoną, część wyników, jakie można przypisać wielkości mierzonej. Niepewność taka to **niepewność rozszerzona** ($U(y)$ lub U) zdefiniowana wzorem:

$$U(y) = k u_c(y), \quad (22)$$

gdzie k to **współczynnik rozszerzenia**. Jest to umownie przyjęta liczba, wybrana tak, by w przedziale $y \pm U(y)$ znalazła się większość wyników pomiaru potrzebna do danych zastosowań. W zgodzie z międzynarodową praktyką do obliczenia U przyjmuje się umowną wartość $k=2$. Wartości inne mogą być stosowane tylko w szczególnych przypadkach.

Typowe zastosowanie niepewności rozszerzonej na I Pracowni to wnioskowanie o zgodności wyniku z wartością tablicową lub porównanie wyników uzyskanych różnymi metodami.

Jeżeli różnica uzyskanego wyniku i wartości tablicowej $\Delta y = y - y_t$ jest mniejsza od wartości niepewności rozszerzonej $U(y)$, to znaczy, że uzyskany wynik jest zgodny z wartością tablicową, w przeciwnym wypadku należy uznać uzyskany wynik za niezgodny z wartością tablicową.

W przypadku porównania dwóch różnych niezależnych pomiarów tej samej wielkości fizycznej, do obliczenia niepewności rozszerzonej należy posłużyć się wzorem:

$$U(y_1 - y_2) = k \sqrt{u(y_1)^2 + u(y_2)^2}. \quad (23)$$

Wyniki pomiarów uważamy za równe w granicach niepewności pomiarowej, jeżeli

$$|y_1 - y_2| < U. \quad (24)$$

Literatura

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.
2. *Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.
3. H. Szydłowski, *Niepewności w pomiarach. Międzynarodowe standardy w praktyce*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.