Prawa statystyczne i niepewności pomiarowe.

I. Zagadnienia

1. Statystyczne ujęcie promieniowania korpuskularnego (rozkład Gaussa i Poissona w szczególności).
2. Podstawy teorii niepewności pomiarowych.

II. Wstęp teoretyczny

Promieniowanie jądrowe podlega prawom statystycznym. To znaczy że nawet przy znanej szybkości zliczeń w badanym zjawisku zarejestrowane liczby impulsów rozkładają się wokół pewnej wartości najbardziej prawdopodobnej. W przypadku kiedy liczba zliczeń jest mała prawdopodobieństwo uzyskania k zliczeń przy znanym natężeniu n podczas czasu t pomiaru opisać można przy pomocy rozkładu Poissona :

$$p_k = \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} \qquad (1)$$

w równaniu tym :

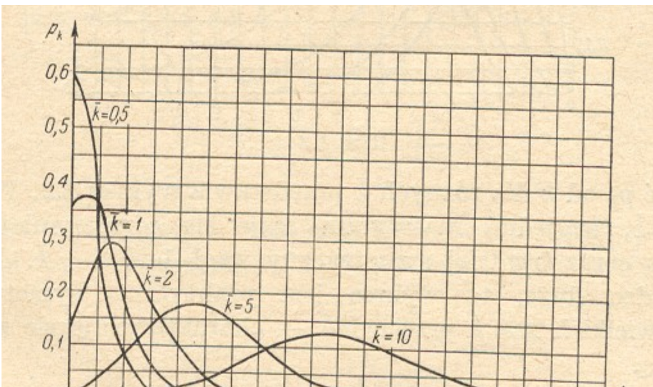
p_k - prawdopodobieństwo uzyskania k zliczeń w pojedynczym pomiarze
n – intensywność zliczeń
t – czas trwania pomiaru.

Jeżeli szybkość zliczeń nie zmienia się w czasie wówczas równanie (1.1) można zapisać następująco:

$$p_k = \frac{\bar{k}^k}{k!} e^{-\bar{k}} \qquad (2)$$

gdzie $\bar{k}$ - jest to wartość średnia liczby zliczeń

Rozkład Poissona jest niesymetryczny dla małych wartości $\bar{k}$. Wraz ze wzrostem $\bar{k}$ rozkład staje się symetryczny względem $\bar{k}$.



Rys. 1. Rozkład Poissona dla różnych wartości średniej liczby zliczeń.

Z (2.2) wynika, że dla każdej wartości $\bar{k}$ możliwe jest urzeczywistnienie dowolnej liczby zdarzeń *k*. Jednak nie wszystkie one występują z równą częstością. Wprowadźmy miarę **fluktuacji** wartości x wokół wartości średniej.
Taką wielkością może być **dyspersja**

$$D_x = \overline{(x - \bar{x})^2} \qquad (3)$$

ponieważ $D_x \neq 0$ oraz jest dodatnie.

W przypadku, kiedy $\sqrt{\bar{k}} >> 1$ obserwujemy pełną symetrię i rozkład Poissona przechodzi w **rozkład Gaussa,** który można opisać pewną funkcją ciągłą unormowaną opisującą prawdopodobieństwo otrzymania pewnej liczby zliczeń w przedziale

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\bar{k}}} \tag{4}$$

skąd wielkość $y = k - \bar{k}$, mająca sens odchylenia liczby zdarzeń k od jej wartości średniej rozkłada się wg

$$u(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{k}}} e^{-\frac{y^2}{2\bar{k}}} \tag{5}$$

Na podstawie (2.5) możemy obliczyć prawdopodobieństwo $P(y_1 \le y \le y_2)$ tego, że wielkość y znajduje się w przedziale od y_1 do y_2 .

$$P(y_1 \le y \le y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2D}} \tag{6}$$

Wyliczając całkę (2.6) otrzymujemy

$$P(|y| \le \sqrt{D}) = 0{,}682 \tag{7}$$

$$P(|y| \le 2\sqrt{D}) = 0{,}954 \tag{8}$$

$$P(|y| \le 3\sqrt{D}) = 0{,}997 \tag{9}$$

Wynik doświadczenia można traktować jako przyporządkowanie temu doświadczeniu pewnej wartości x, której nie da się dokładnie przewidzieć mimo sprecyzowania warunków doświadczenia. Wykonywany pomiar obarczony jest niepewnością pomiarową i stanowi przybliżenie wartości rzeczywistej.

Zalecany sposób zapisu wartości x wielkości mierzonej jest następujący:

standardowa: wartość wielkości mierzonej (niepewność pomiarowa) jednostka;

na przykład: $g = 9{,}781(76)\, m/s^2$

rozszerzona: (wartość wielkości mierzonej $\pm$ niepewnoś pomiarowa)jednostka,

na przykład: $g = (9{,}78 \pm 0{,}15)\, m/s^2$

przy czym obowiązuje zasada podawania 2 cyfr znaczących niepewności.

Istnieją dwie podstawowe metody oceniania niepewności pomiarowych:

- metoda typu A – opiera się na statystycznej analizie serii n pomiarów, które tworzą tzw. próbę losową. Interesującym nas parametrem jest odchylenie standardowe, którego estymator utożsamiany jest z niepewnością pomiaru. Pozwala to jednak uzyskać niepewność związaną tylko z błędem przypadkowym;
- metoda typu B – obejmuje wszystkie inne sposoby oceny niepewności niż statystyczna analiza wyników serii pomiarów. Głównie opiera się ona na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności. Metoda ta jest jedynym sposobem oceny błędu systematycznego, ale może być zastosowana do oceny błędu przypadkowego jeżeli dysponujemy wynikiem tylko jednego pomiaru.

Jeżeli jednocześnie występują oba rodzaje błędów (systematyczny oraz przypadkowy) to niepewności z nimi związane należy określić przy pomocy odpowiadającej im metody a obydwa przyczynki zsumować geometrycznie.

Metoda typu A.

Wykonujemy serię n pomiarów, w i-tym pomiarze uzyskujemy wynik N_i. Otrzymujemy pewną próbę losową, którą traktujemy jako n realizacji zmiennej losowej o wartości oczekiwanej $E(N)$ utożsamianą z wartością rzeczywistą N_0 oraz odchyleniu standardowym σ. W większości przypadków średnia arytmetyczna $\overline{N}$ jest najlepszym estymatorem wartości rzeczywistej N_0. Średnia arytmetyczna liczby zliczeń impulsów *N* z *n* pomiarów równa się:

$$\overline{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n} \tag{10}$$

gdzie: *n* – liczba wykonanych pomiarów,

N_i – liczba zliczeń impulsów w i-tym pomiarze.

Jeżeli bierzemy pod uwagę liczbę zliczeń impulsów *N* na jednostkę czasu *t* (tzw. szybkość zliczeń *I*) to średnia arytmetyczna tej wielkości otrzymana z *n* – pomiarów równa się:

$$\overline{I} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{n}, \quad I_i = \frac{N_i}{t} \tag{11}$$

gdzie: I_i – szybkość zliczeń w i-tym pomiarze.

Miarą rozrzutu wyników pomiaru jest parametr statystyczny zwany estymatorem odchylenia standardowego lub odchyleniem standardowym eksperymentalnym, a który w przypadku pomiaru szybkości zliczeń *I* wyrażony jest wzorem:

$$S_I = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(N_i - \overline{N}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - \overline{I}\right)^2}{n-1}}. \tag{12}$$

Wielkość S_i można by utożsamiać z niepewnością pomiaru, gdybyśmy za jego wynik przyjęli jakąkolwiek i-tą wartość N_i. Ponieważ za wynik pomiaru przyjmujemy średnią arytmetyczną, niepewność pomiaru szybkości zliczeń utożsamiamy z odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej arytmetycznej. Odchylenie standardowe eksperymentalne średniej jest $\sqrt{n}$ razy mniejsze od wartości odchylenia standardowego eksperymentalnego wobec czego:

$$S_{\overline{I}} = \frac{S_I}{\sqrt{n}} \tag{13}$$

A więc niepewność pomiarowa średniej arytmetycznej wynosi:

$$u\left(\overline{I}\right) \equiv S_{\overline{I}} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(N_i - \overline{N}\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - \overline{I}\right)^2}{n(n-1)}}. \tag{14}$$

Wielkości $S_I, S_{\overline{I}}$ są równe prawdziwym wielkościom odchylenia standardowego tylko w granicy $n \to \infty$. Gdy liczba pomiarów n jest skończona, niepewność pomiaru znamy ze skończoną niezbyt wielką dokładnością:

Tabela 1.

Względna niepewność oceny odchylenia standardowego S_x, $S_{\overline{x}}$ dla serii n pomiarów (u nas *x* odpowiada liczbie zliczeń impulsów *N* w czasie *t*)

Liczba pomiarów	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**100**
Niepewność oceny	**43%**	**38%**	**34%**	**31%**	**28%**	**25%**	**22%**	**7%**

Z powyższej tabeli wynika, że powtarzanie pomiaru zmniejsza niepewność spowodowaną błędem przypadkowym i umożliwia oszacowanie niepewności z coraz większą dokładnością.

Z zasady uważa się, że trzeba wykonać co najmniej 6 –10 pomiarów dla określenia odchylenia standardowego. Pozwala to na ocenę niepewności z dokładnością rzędu 30-20%. Jednakże nadmierne zwiększanie liczby pomiarów jest niecelowe ponieważ zwiększenie dokładności wraz ze wzrostem n jest bardzo powolne. Zmniejszenie wielkości niepewności osiągamy raczej drogą poprawy techniki pomiaru oraz zwiększeniem czasu poszczególnych pomiarów.

Wykonywanie małej liczby pomiarów od 2 do 3 ma sens jako sprawdzian powtarzalności wyniku pomiaru. Za wynik pomiaru przyjmiemy wtedy średnią arytmetyczną, ale nie należy obliczać niepewności w przedstawiony powyżej sposób. W takim przypadku zastosujemy jedną z metod typu B.

Metoda typu B.

Jądra promieniotwórcze rozpadają się z pewnym prawdopodobieństwem stałym w czasie, i tylko to średnie prawdopodobieństwo jesteśmy w stanie określić. Nigdy nie możemy przewidzieć kiedy konkretne jądro ulegnie rozpadowi. To właśnie sprawia, że liczba zliczeń impulsów z preparatu promieniotwórczego, jaką mierzymy w ustalonym czasie, będzie w każdym pomiarze inna. Fluktuacje otrzymanej populacji próbnej opisuje rozkład Poissona. Impulsy pochodzące od preparatu promieniotwórczego nie przychodzą w równych odstępach (technicznie można t nawet zauważyć obserwując zachowanie przelicznika, który zatrzymujemy dopiero po wyznaczonym okresie czasu), lecz są przypadkowo rozmieszczone „na osi czasu” analogicznie do rozmieszczenia zdarzeń przypadkowych w definicji rozkładu Poissona. Odchylenie standardowe w tym rozkładzie jest równe pierwiastkowi z wartości oczekiwanej. Opierając się na tym obliczamy **niepewność standardową** pomiaru liczby zliczeń impulsów *N* na podstawie pojedynczego pomiaru

$$u(N)=\sqrt{N}\ . \tag{15}$$

Jest to niezależne od jakichkolwiek parametrów eksperymentu (czas, rodzaj źródła, detektor, itd.). Natomiast **niepewność standardowa** pomiaru szybkości zliczeń impulsów na podstawie pojedynczego pomiaru wynosi:

$$u(I)=\frac{\sqrt{N}}{t}=\sqrt{\frac{N}{t^2}}=\sqrt{\frac{I}{t}}\ . \tag{16}$$

Wartość **względnej niepewności** pomiaru szybkości zliczeń impulsów na podstawie pojedynczego pomiaru obliczamy ze wzoru:

$$u_r(I)=\frac{1}{\sqrt{tI}}\ . \tag{17}$$

Niepewność względną możemy wyrazić w procentach mnożąc jej wartość przez 100.

Analizując wartości niepewności względnej pomiaru szybkości zliczeń dojdziemy do wniosku, że jest ona relatywnie duża. Wniosek jest następujący: jednym sposobem polepszenia dokładności pomiaru zmiennej podlegającej rozkładowi Poissona jest zwiększenie liczby zliczeń czyli „uzyskanie dobrej statystyki". Gdy warunki ćwiczenia są ustalone uzyskanie tego celu może nastąpić jedynie poprzez wydłużenie czasu pomiaru.

Niektórych wielkości nie da się zmierzyć bezpośrednio. Wyznaczamy je na podstawie innych bezpośrednio mierzalnych wielkości. Pomiar pośredni określamy zależnością funkcyjną

$$y=f(x_1,x_2,.....,x_n)\ . \tag{18}$$

Wielkości wejściowe x_i posiadają określone niepewności $u(x_i)$. Niepewności te przenoszą się – czyli propagują – na niepewność zmiennej y.

Najprostszym przypadkiem jest funkcja będąca wynikiem dodawania lub odejmowania dowolnej liczby składników, czyli

$$y=x_1+x_2-x_3+................, \tag{19}$$

wtedy **niepewność złożona** $u_C(y)$

$$u_C(y)=\sqrt{u^2(x_1)+u^2(x_2)+...} \tag{20}$$

jest sumą geometryczną niepewności składników.

W pomiarach wykonywanych za pomocą licznika G-M (i innych detektorów impulsowych) obserwowana szybkość zliczeń jest z reguły sumą dwu składników: pochodzącego od samego interesującego nas zjawiska I_p i uwarunkowanego czynnikami ubocznymi w stosunku do niego (np. promieniowaniem kosmicznym, wyładowaniami w samym detektorze, ... itp.) nazywanego tłem układu pomiarowego I_T (krótko tłem). Tak więc mierzona szybkość zliczeń jest równa:

$$I_{p+T}=I_p+I_T \Rightarrow I_p=I_{p+T}-I_T \tag{21}$$

W celu wyznaczenia I_p należy wykonać pomiar tła I_T, pomiar szybkości zliczeń I_{p+T}.

Niepewność złożona pomiaru szybkości zliczeń I_p wynosi:

$$u_C(I_p)=\sqrt{u(I_{p+t})^2+u(I_T)^2} \tag{22}$$

gdzie: $u(I_{p+T})$ - niepewność pomiaru szybkości zliczeń impulsów sumarycznych – tła i zjawiska,

$u(I_T)$ - niepewność pomiaru tła.

Ponieważ

$$u(I_{p+T})=\frac{\sqrt{N_{p+T}}}{t_{p+T}}=\sqrt{\frac{I_{p+T}}{t_{p+T}}}\ \text{oraz}\ u(I_T)=\frac{\sqrt{N_T}}{t_T}=\sqrt{\frac{I_T}{t_T}}\ , \tag{23}$$

to

$$u_C(I_p)=\sqrt{\frac{N_{p+T}}{t_{p+T}^2}+\frac{N_T}{t_T^2}}=\sqrt{\frac{I_{p+T}}{t_{p+T}}+\frac{I_T}{t_T}}\ . \tag{24}$$

Względna niepewność złożona pomiaru szybkości zliczeń I_p wynosi:

$$u_{rc}\left(I_p\right)=\frac{\sqrt{\dfrac{I_{p+T}}{t_{p+T}}+\dfrac{I_T}{t_T}}}{I_{p+T}-I_T}\,. \tag{25}$$

Niepewność tą można wyrazić w procentach mnożąc prawą stronę przez 100.

W przypadku średniej arytmetycznej **niepewność złożona** I_p wynosi:

$$u_C\left(\overline{I}_p\right)=\sqrt{\frac{\sum\left(I^i_{p+T}-\overline{I}_{p+T}\right)^2}{n(n-1)}+\frac{\sum\left(I^i_T-\overline{I}_T\right)^2}{m(m-1)}}\,, \tag{26}$$

gdzie:

$$\overline{I}_{p+T}=\frac{\sum\limits_i I^i_{p+T}}{n};\quad \overline{I}_T=\frac{\sum\limits_i I^i_T}{m}; \tag{27}$$

sumowanie przebiega od i=1 do n lub m, gdzie: m, n – liczba wykonywanych pomiarów.

Wszystkie powyżej przeprowadzone obliczenia, ogólnie rzecz ujmując, dotyczą niepewności standardowych co oznacza, że w przedziale od $y-u(y)$ do $y+u(y)$ wartość rzeczywista znajduje się z prawdopodobieństwem 68% (dla rozkładu Gaussa). Teraz interesuje nas wielkość, która wybrana została tak, aby w analogicznym przedziale znalazły się prawie wszystkie wyniki pomiarów. Wielkość taką nazwano **niepewnością rozszerzoną *U*** i jest ona wielkością pochodną od niepewności złożonej pomnożoną przez bezwymiarowy współczynnik **rozszerzenia k**.

W naszym doświadczeniu niepewność rozszerzona pomiaru szybkości zliczeń impulsów z wybranego preparatu promieniotwórczego:

$$U\left(I_p\right)=ku_C\left(I_p\right)\,. \tag{28}$$

Zgodnie z międzynarodową praktyką do obliczeń przyjmujemy umowną wartość *k=2*, której odpowiada prawdopodobieństwo realizacji zmiennej losowej w przedziale niepewności pomiarowej równe 95% dla rozkładu Gaussa.

III. Część doświadczalna

A. Aparatura pomiarowa:

Rys. 1. Zdjęcie układu pomiarowego

B. Wykonanie ćwiczenia

1. Włączyć układ elektroniczny i sprawdzić działanie układu przeliczającego.
2. Ustawić napięcie pracy licznika radiometru.
3. Wstawić preparat promieniotwórczy do domku ołowianego i przystąpić do pomiaru natężenia promieniowania źródła $I = \frac{N}{t}$ (N – całkowita liczba zliczeń, t – czas pomiaru). Pomiar powtórzyć 5-krotnie przy niezmienionej geometrii układu. Czas pomiaru powinien wynosić 30 s.
4. Zmierzyć natężenie źródła promieniotwórczego wykonując:
   a) 15 pomiarów – każdy po 100 sekund;
   b) 15 pomiarów – każdy po 300 sekund.
5. Wykonać pomiar tła 3-krotnie w czasie *100s* po zakończeniu pomiarów.

UWAGA: W trakcie pomiarów nie zmieniać geometrii układu doświadczalnego.

C. Opracowanie wyników.

a) Na podstawie pomiarów w punktach 3-5 obliczyć:
- niepewność standardową szybkości zliczeń impulsów i względną niepewność standardową;
- niepewność złożoną i względną niepewność złożoną szybkości zliczeń impulsów;
- niepewność złożoną dla średniej arytmetycznej szybkości zliczeń;
- niepewność rozszerzoną szybkości zliczeń.

b) Na podstawie pomiarów w punkcie 5 obliczyć:
- niepewność dla średniej arytmetycznej szybkości zliczeń impulsów dla każdej serii.

c) Ocenić rolę tła i czasu pomiaru w przeprowadzonym eksperymencie.

IV. Literatura

1. K. Małuszyńska, M. Przytuła, „Laboratorium fizyki jądrowej" [PWN, Łódź 1969];
2. W. I. Goldanski, „Statystyka pomiarów przy rejestracji promieniowania jądrowego" [PWN, Warszawa 1963];