Rozkład Poissona

I. Zagadnienia

1. Statystyczne ujęcie promieniowania korpuskularnego:
- rozkład Poissona;
- rozkład Gaussa;
- przejście rozkładu Poissona w rozkład Gaussa dla dużej średniej liczby zliczeń.
2. Fluktuacje liczby zliczeń, dyspersja i poziom ufności pomiaru.
3. Znajomość obsługi układu pomiarowego i wykonania ćwiczenia.

II. Wstęp teoretyczny

Dokonując kilkakrotnie pomiaru tej samej wielkości fizycznej X otrzymuje się za każdym razem nieco inne wartości. Różnice wynikają stąd, że przy każdym pomiarze popełniamy pewien błąd. Jeśli błędy mają charakter przypadkowy, to średnia arytmetyczna z poszczególnych pomiarów daje dokładniejszy wynik danej wielkości X:

$$X = \frac{\sum x_i}{n} \tag{2.1}$$

gdzie n oznacza liczbę pomiarów.

Ilościowym kryterium rozrzutu wyników poszczególnych pomiarów jest wartość średnia kwadratów różnic między wartością średnią a wynikami pomiarów, czyli dyspersja:

$$D = \frac{1}{n}\sum\left(X_i - X\right)^2 \tag{2.2}$$

Można też używać jako wskaźnika dokładności poszczególnych pomiarów wielkości σ zwanej średnim błędem kwadratowym lub odchyleniem standardowym. Wielkość ta jest pierwiastkiem kwadratowym z dyspersji.

Promieniowanie jądrowe ma charakter statystyczny, można więc do jego opisu używać teorii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Prawdopodobieństwo A P(A) dowolnego zdarzenia jest miarą występowaniem zdarzenia A w pewnym, zawartym przedziale (a,b). Jeśli wykonujemy wiele pomiarów wielkości A w tych samych warunkach to:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{n}\right) \tag{2.3}$$

gdzie m – liczba pomiarów z wynikiem A z przedziału (a,b), n – liczba wszystkich wykonanych pomiarów.

Prawdopodobieństwo P(A) jest liczbą z przedziału: $0 \le P(A) \le 1$.

Jeżeli m = n to P(A) = 1, czyli A jest zdarzeniem pewnym.

Jeżeli m = 0 to P(A) = 0, czyli A jest zdarzeniem niemożliwym.

Jeżeli zdarzenie A posiada określony rozkład przypadków, wówczas jest ono zmienną losową X. Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przybiera dowolną wartość, należącą do pewnego zbioru S, nazywamy funkcją rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X_i oznaczamy przez P(S). Zmienna losowa X może być może być typu skokowego lub ciągłego. Zmienna losowa typu skokowego przyjmuje tylko pewne wartości x_i . Dla każdej wartości x_i istnieje określone prawdopodobieństwo $p_i=f(x_i)$, że zmienna losowa przyjmuje wartości x_i:

$$P\left(X = x_i\right) = f\left(x_i\right) \qquad i = 1, 2, 3....n$$

Prawdopodobieństwo $P(X = x_i)$ nazywamy funkcją rozkładu dla zmiennej losowej typu skokowego. Suma wszystkich prawdopodobieństw p_i jest równa pewności

$$\sum f\left(x_i\right) = 1$$

Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa oraz gęstość prawdopodobieństwa opisuje dystrybuanta. Dystrybuantą F(x) nazywamy zespół liczb, określających prawdopodobieństwo

$$F(x) = P(X < x) \tag{2.4}$$

co oznacza, że dla dowolnej wartości zmiennej losowej X istnieje określone prawdopodobieństwo P, że jest ona mniejsza od pewnej liczby dodatniej x.

Momentem rzędu pierwszego m_1 dla zmiennej losowej X typu skokowego jest równy:

$$m_i = E(X) = \sum_{-\infty \le x_i \le \infty} x_i p_i \qquad (2.5)$$

a dla zmiennej losowej X typu ciągłego mamy:

$$m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (2.6)$$

Moment m_1 jest miarą położenia rozkładu i podaje on wartość oczekiwaną zmiennej losowej X. Stąd też nazywa się go często wartością oczekiwaną E(X) lub wartością średnią x.
Jeżeli c jest dowolną stałą, to wartość

$$m_k^o = E(X - c)^k \qquad (2.7)$$

nazywamy momentem k-tego rzędu względem punktu c.
Moment rzędu drugiego względem stałej c

$$m_2^o = E(X - c)^2 \qquad (2.8)$$

nazywamy średnim kwadratowym odchyleniem zmiennej losowej X od stałej c.

Moment centralny drugiego rzędu μ_2 czyli średnie kwadratowe odchylenie od wartości oczekiwanej m_i nazywamy wariancją, którą oznaczamy symbolem var(X)

$$\operatorname{var}(X) = E(X - m_i)^2 = E(X^2) - m_1^2 = m_2 - m_1^2 \qquad (2.9)$$

Wariancja zmiennej losowej X jest miarą rozproszenia rozkładu zmiennej losowej dookoła jej wartości oczekiwanej. Pierwiastek kwadratowy z wariancji nazywamy odchyleniem standartowym.

Podstawowym rozkładem częstości dla zdarzeń przypadkowych jest rozkład dwumianowy. Jeśli prawdopodobieństwo zdarzenia A w jednorazowym doświadczeniu wynosi p, a zmienna losowa przyjmuje wartość k, to prawdopodobieństwo takiego zdarzenia przy wykonaniu n pomiarów wynosi:

$$p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (2.10)$$

Sytuacja taka może być zrealizowana w dowolny sposób, a liczba możliwości wynosi:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad (2.11)$$

Zatem prawdopodobieństwo, że X przyjmuje wartość k wynosi:

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (2.12)$$

Jeżeli liczba wykonanych pomiarów jest bardzo duża, to rozkład wyników doświadczalnych można opisać rozkładem Poissona. Rozkład Poissona jest granicznym przypadkiem rozkładu dwumianowego.

$$P(X = x) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (2.13)$$

Jeśli pomiar prowadzimy w odstępach czasu Δt, to p = Δt/t, I = lim n/t – średnia liczba zliczeń dochodząca w czasie 1 sekundy do licznika.
Przy n→∞ i k«n :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!} \qquad (2.14)$$

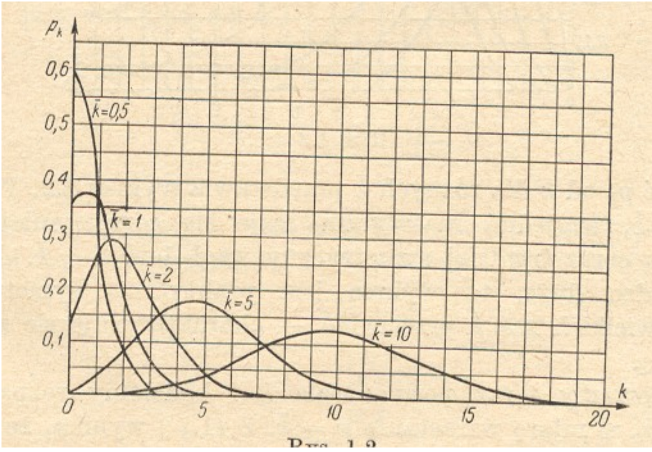
Zatem:

$$P(x = k) = \left(\frac{I\Delta t}{n!}\right)^k e^{-I\Delta t} \qquad (2.15)$$

Ale $I\Delta t = \bar{k}$ więc:

$$P(X = k) = \frac{\bar{k}^k}{k!} e^{-\bar{k}} \qquad (2.16)$$

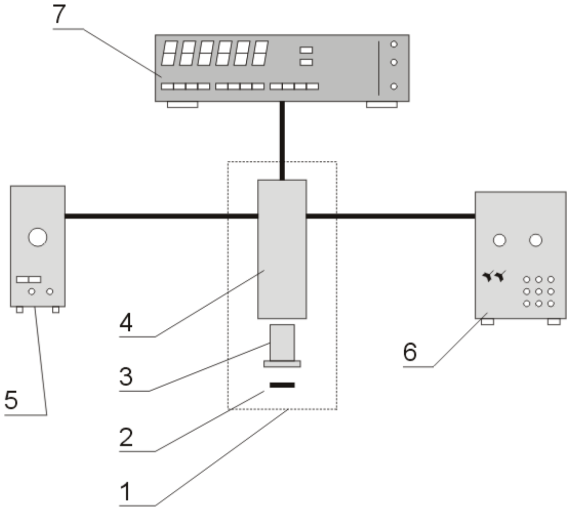
gdzie $\bar{k}$ jest to wartość średnia liczby zliczeń.



Rys. 2.1. Zależność prawdopodobieństwa uzyskania k zliczeń dla różnych $\bar{k}$

III. Część doświadczalna

A. Schemat blokowy aparatury pomiarowej



1. Domek ołowiany
2. Preparat promieniotwórczy
3. Licznik G-M.
4. Przedwzmacniacz
5. Zasilacz wysokiego napięcia
6. Zasilacz przedwzmacniacza
7. Przelicznik

Rys. 1. Schemat blokowy układu pomiarowego

B. Wykonanie ćwiczenia

1. Dobrać czas trwania pojedynczego pomiaru (t) tak aby średnia liczba zliczeń dla tego czasu wynosiła 7-10.
2. Zmierzyć co najmniej 200-krotnie natężenie tła dla zadanego odstępu czasu (t) określonego w pkt. 1. Wyniki zapisać w tabeli.
3. Obliczyć ilość $N(k)$ występujących zliczeń *k*, dla których liczba zliczeń wynosi *k*.

C. Opracowanie wyników

1. Obliczyć ilość N_k pomiarów, w których uzyskano k zliczeń. Określić doświadczalne prawdopodobieństwo p_k uzyskania k zliczeń w pomiarze korzystając ze wzoru:

$$p_k = \frac{N_k}{\sum N_k}.$$

Wyniki zamieścić w tabeli.

k	$\mathbf{N_k}$	$\mathbf{kN_k}$	$\mathbf{p_{k\ do\acute{s}w}}$	$\mathbf{p_{k\ teor}}$	$\mathbf{\Delta p_{k\ do\acute{s}w}}$	$\mathbf{(k-k_{\acute{s}r})^2}$

2. Na podstawie danych doświadczanych wyliczyć należy średnią arytmetyczną liczby zliczeń ze wzoru:

$$\bar{k}_{eksp} = \frac{\sum_{k=0}^{n} kN_k}{\sum_{k=0}^{n} N_k},$$

gdzie n jest maksymalną liczbą zliczeń uzyskaną w pojedynczym pomiarze.

3. Sporządzić wykres słupkowy doświadczalnego rozkładu prawdopodobieństwa uzyskania k zliczeń w pojedynczym pomiarze. Porównać rozkład doświadczalny z rozkładem teoretycznym Poissona opisanego wzorem:

$$p_k = \frac{(\bar{k})^k}{k!} e^{-\bar{k}}$$

4. Obliczyć dyspersją na podstawie danych doświadczalnych $D_{eksp} = \overline{(k-\bar{k})^2}$ i porównać ją z wartością teoretyczną wynikającą z praw rozkładu Poissona wynoszącą:

$$D_{teor} = \bar{k}.$$

5. Przedyskutować uzyskane wyniki i różnice pomiędzy wynikami doświadczalnymi i wartościami teoretycznymi z uwzględnieniem błędu standartowego.

6. Prześledzić ewolucję rozkładu doświadczalnego w zależności od ilości wykonanych pomiarów. (wykonać wykres słupkowe rozkładu np. dla 1,10, 20 pomiarów)

IV. Literatura

1. K. Małuszyńska, M. Przytuła, „Laboratorium fizyki jądrowej” [PWN, Łódź 1969];
2. T. Hilczer, „Ćwiczenia z fizyki jądrowej” [UAM, Poznań 1975];
3. William J. Price, „Detekcja promieniowania jądrowego” [PWT, Warszawa 1960];
4. Sz. Szczeniowski, cz. VI, „Fizyka doświadczalna. Fizyka jądra i cząstek elementarnych” [PWN, Warszawa 1974];
5. A. Strzałkowski, „Wstęp do fizyki jądra atomowego” [PWN, Warszawa 1969];
6. I. Kaplan, „Fizyka jądrowa” [PWN, Warszawa 1957];
7. K. N. Muchin, „Doświadczalna fizyka jądrowa” t. 1 i 2 [Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1978];
8. M. Subotowicz, „Metody doświadczalne w fizyce ciała stałego” [Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie, Lublin 1976];
9. J. M. Massalski, „Detekcja promieniowania jądrowego”, [PWN, Warszawa 1959];
10. G. E. Pustowałow, „Fizyka atomowa i jądrowa”, [PWN, Warszawa 1975];
11. J. Araminowicz, K. Małuszyńska i inni, „Laboratorium fizyki jądrowej” [PWN, Warszawa 1974];
12. H. Hart, E. Karstens, „Izotopy promieniotwórcze w zastosowaniu do pomiaru grubości” [PWT, Warszawa 1960];
13. W. I. Goldanski, „Statystyka pomiarów przy rejestracji promieniowania jądrowego” [PWN, Warszawa 1963];